ROYAUME DU MAROC
المملكة المغربية

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique
et de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Nationale Supérieure de l'Informatique et d'Analyse des Systèmes

ENSIAS

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs
et Établissements Assimilés

Session 2012

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Filière **MP**

Durée 4 heures

Concours National Commun

Mathématiques II
AQALMOUN Mohamed agrégé de mathématiques CPGE Khouribga

L'objet de ce problème est d'établir le résultat suivant dû à **FARAHAT** et **LEDERMAN** en 1958 :

> *Pour tout polynôme unitaire P de degré $n \geq 2$ à coefficient dans $\mathbb{K}$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et toute matrice $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ dont le polynôme minimal est de degré $n-1$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que N soit une sous-matrice de M et que le polynôme caractéristique de M soit égal à $(-1)^n P$*

La troisième partie du problème utilise le résultat de la seconde ; la dernière partie utilise les résultats de première et de la troisième partie.

Notations et rappels

Dans tout ce problème ,$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{K}[X]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_m[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq m$.

Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonne ; $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$; on note aussi I_n (resp. 0_n) la matrice identité (resp. la matrice nulle) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $rg(A)$ son rang ; si de plus $n = p$, la trace de A est noté $Tr(A)$ et son déterminant est noté $\det(A)$ ou $|A|$.

Le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté π_A est sont polynôme caractéristique est noté χ_A ; on rappelle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A = \det(A - \lambda I_n) = |A - \lambda I_n|$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la comatrice de A est noté $\widetilde{A}$; on rappelle que $A{}^t\widetilde{A} = {}^t\widetilde{A}A = |A|I_n$.

Première partie : Expression d'un déterminant

1. (a) On suppose ici que la matrice B est inversible

   i. En effectuant un produit matriciel par blocs,déterminer $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

   $$\begin{pmatrix} B & v \\ {}^tu & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^tu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & w \\ {}^tu & \lambda \end{pmatrix}$$

   ii. Exprimer le déterminant $\begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^tu & 1 \end{vmatrix}$ en fonction du déterminant de la matrice B

   iii. Exprimer l'inverse B^{-1} de B en fonction de sa comatrice $\widetilde{B}$ et de son déterminant $|B|$.

   iv. Montrer que

   $$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^tu & b \end{vmatrix} = b|B| -{}^t u{}^t\widetilde{B}v \quad (1)$$

   (b) On revient au cas général et on ne suppose plus que la matrice B est inversible.

   i. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \varepsilon[$, la matrice $B_x = B - xI_n$ est inversible.

   ii. • Si m est un entier ≥ 1, montrer que les applications $A \to {}^tA$ et $A \to |A|$,définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,sont continues.
   On admet que l'application $A \to \widetilde{A}$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est aussi continue.

iii. Montrer alors que la formule (1) ci-dessus est encore valable dans ce cas.

Deuxième partie : Réunion de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel non nécessairement de dimension finie ; os suppose un entier naturel $r \geq 2$ et des sous espaces vectoriels $F_1, F_2, ..., F_r$ de E tels que

$$E = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_r$$

2. (a) Si $r = 2$, montrer que $E = F_1$ ou $E = F_2$. On pourra raisonner par l'absurd et considérer,après en avoir justifier l'existence, un vecteur $x_1 + x_2$ où x_1 et x_2 sont tels que $x_2 \in E \setminus E_1$ et $x_1 \in E \setminus E_2$
Dans la suite de cette partie , on suppose $r \geq 2$ et on pose $F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{r-1}$
(b) On suppose ici que $E \neq F$ et $E \neq F_r$, et on considère deux vecteurs $x \in E \setminus F$ et $y \in E \setminus F_r$.
i. Justifier que $x \in F_r$ et montrer que , pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \notin F_r$
ii. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \in F$ puis montrer alors qu'il existe deux scalaires α et β distincts, et un entier k compris entre 1 et $r - 1$, tels que $y + \alpha x \in F_k$ et $y + \beta x \in F_k$.
iii. Trouver une contradiction et conclure.
(c) Montrer qu'il existe un entier $i \in \{1, ..., r\}$ tel que $E = F_i$

Troisième partie :À propos du polynôme minimal d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$,avec $m \in \mathbb{N}$, $P(A)$ désigne la matrice $\sum_{k=0}^{m} a_k A^k$ avec la convention $A^0 = I_n$; P est dit un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$. On rappelle que le polynôme minimal π_A de A est le polynôme unitaire de degré minimal annulateur de A,c'est le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de A.

3. (a) Montrer que le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de degré $\leq n$
(b) Montrer que le degré du polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égal à n si, et seulement si, $(I_n, ..., A^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; pour tout $\vec{\in} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on pose

$$I_{A,v} = \{P \in \mathbb{K}[X]; P(A)v = 0\}$$

i. Si $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, montrer que $I_{A,v}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ engendrant cet idéal.
Dans la suite du problème, ce polynôme sera noté $\pi_{A,v}$.
ii. Montrer que, pour tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\pi_{A,v}$ divise π_A puis en déduire que l'ensemble $\{\pi_{A,w}; w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$ est fini.
On considère donc un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et des vecteurs $v_1, ..., v_r$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que

$$\{\pi_{A,w}; w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \{\pi_{A,v_1}, ..., \pi_{A,v_r}\}.$$

On pose enfin $F_k = \{v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ ; \ \pi_{A,v_k}(A)v = 0\}, \ k \in \{1, ..., r\}$.
iii. Vérifier que, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, F_k est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et justifier que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = F_1 \cup ... \cup F_r$$

iv. Montrer alors qu'il existe $w \in \mathcal{M}_{n,1}$ tel que $\pi_{A,w} = \pi_A$
(d) Déterminer un vecteur $e \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\pi_{A,w} = \pi_A$ où A est la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad , \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

(e) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.On considère les assertions (i), (ii) et (iii) suivantes dont on veut montrer qu'elle sont équivalentes :
(i) Le polynôme minimal π_A de la matrice A est de degré n.
(ii) Il existe $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que ,pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, il existe $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant

$$x = ({}^t uv, {}^t uAv, ..., {}^t uA^{n-1}v)$$

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, il existe $(u, v) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$ tel que $x = ({}^t uv, {}^t uAv, ..., {}^t uA^{n-1}v)$
Comme il est évident que l'assertion (ii) entraîne l'assertion (iii) , il suffit de montrer que l'assertion (i) entraîne (ii) et que l'assertion (iii) entraîne (i)

i. Montrer que l'assertion (i) entraîne l'assertion (ii). On pourra considérer la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les vecteurs $v, Av, ..., A^{n-1}v$,pris dans cet ordre, ou v est un vecteurs bien choisi dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

ii. Montrer que l'assertion (iii) entraîne l'assertion (i) . On pourra utiliser la caractérisation de la question 3.2

Quatrième partie : Démonstration du résultat proposée

Dans cette parte , on se donne un entier $n \geq 2$, un polynôme $P = X^n + \sum_{k=1}^{n} c_k X^{n-k} \in \mathbb{K}[X]$, unitaire de degré n, et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ dont le polynôme minimal est de degré $n - 1$.
On se propose de montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = (-1)^n P$ et dont B soit une sous matrice ; pour cela , on cherche A sous la forme $\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$, où les inconnues $b \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ sont à déterminer en fonction des coefficients des données P et B

4. (a) Justifier que si A répond à la question alors le coefficient b de la matrice A est entièrement déterminer et en donner l'expression en fonction des coefficients des données P et B

Dans la suite on écrit $\chi_B = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^{n-1-k}$ avec $\alpha_0 = 1$, et on pose $b = \alpha_1 - c_1$.
On cherche à justifier l'existence $u, v \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ tels que la matrice A répond à la question.

(b) **Une famille de polynômes** : On pose $U_p = \sum_{k=0}^{n-2-p} \alpha_k X^{n-2-k-p}$, $p \in \{0, ..., n-2\}$.

i. Montrer que $(U_0, ..., U_{n-2})$ est une famille libre de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$

ii. Montrer que tout $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ peut s'écrire $Q = \sum_{k=0}^{n-2} {}^t y B^k z U_k$ avec $y, z \in \mathcal{M}_{n-1,1}$

(c) **Expression d'une matrice** :

i. Montrer que, pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{K}^2$, $\chi_B(x) - \chi_B(\lambda) = (-1)^{n-1}(x - \lambda) \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)\lambda^p$

ii. En déduire que , pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\chi_B(x)I_{n-1} = (-1)^n(B - xI_{n-1}) \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p$

iii. Montrer que la transposée de la comatrice de $(B - xI_{n-1})$ vaut $(-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p$, pour tout $x \in \mathbb{K}$

(d) **Résolution du problème** : A désigne toujours la matrice ci-dessus avec $b = \alpha_1 - c_1$

i. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(x) = (-1)^n(x^n + (\alpha_1 - b)x^{n-1} + H(x)) - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x){}^t uB^p v$$

où les coefficients de H ne dépendent que du scalaire b et des coefficients de χ_B.

ii. Montrer que $\chi_A = (-1)^n P$ si, et seulement si, $H - \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k} = \sum_{p=0}^{n-2} {}^t u B^p v U_p$

iii. Justifier alors l'existence d'au moins deux vecteurs u et v de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ tels que la matrice A répond au problème posé.

Fin de l'épreuve